٥٠

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　تحليل عقدي /٢/　　　اسم الطالب :

الدورة الصيفية للعام الدراسي ٢٠١٠-٢٠١١

السؤال الأول : (٢٤درجة)

عين النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية في المستوي العقدي، ثم صنف هذه النقاط

$$f_3(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}} \quad \& \quad f_2(z)=\frac{z-\sin 2z}{z^3} \quad \& \quad f_1(z)=\frac{z^4}{e^{24}-1}$$

السؤال الثاني :(٢٥درجة)

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)=\frac{z+1}{z(z-4)^3}$ في النطاق $0<|z-4|<4$

ثم عين نوع نقطة اللانهاية للدالة السابقة ومن ثم حدد قيمة الراسب عند $z=4$

السؤال الثالث : (١٢+١٢+١٢=٣٦درجة)

إعتمادا" على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}d\theta \quad \& \quad I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$$

$$I_3=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

السؤال الرابع : (١٥درجة)

إذا كان $f(z)=\frac{(z^2+1)^2}{(z^2-2z+2)^2}$ فما هي قيمة التكامل

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4} z.\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د.رامز الشيخ فتوح

٥٦

جواب السؤال الأول [24] أ. تمارين (؟)

أولاً النقاط الشاذة للدالة $f(z) = \frac{z^4}{e^{2z}-1}$ هي جذور المعادلة $e^{2z}-1=0$

أي جذور المعادلة $e^{2z}=1$ ، $2z = 2n\pi i$ ، $n = 0, \pm1, \pm2$

← $z = n\pi i$ ، $n = 0, \pm1, \pm2$

4 عندما $n=0$ فإن النقطة $z=0$ هي صفر للبسط وأيضاً صفر من الدرجة الأولى للمقام وبالتالي $z=0$ صفر للبسط من الدرجة الرابعة لذلك $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة f_1

4 أما النقاط $z = n\pi i$ ، $n = \pm1, \pm2, ..$ لأنها أصفار من الدرجة الأولى للمقام تجعلها أقطاب بسيطة

ثانياً، النقاط الشاذة للدالة f_2 هي النقطة النقطة $z=0$ وهي صفر من الدرجة الثانية للمقام ولنأخذ أيضاً صفر للبسط لتحديد نوع هذا الصفر

$f'(z) = 1 - 2\cos 2z \Rightarrow f'(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$

إذن $z=0$ هي صفر من الدرجة الأولى للبسط وصفر من الدرجة الثانية للمقام أي أن $z=0$ هي قطب للدالة $f_2(z)$ من الرتبة الثانية

ثالثاً، النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي النقطة $z=0$ وبما أن النهاية

$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ غير موجودة فإن النهاية

$\lim_{z\to 0} f_3(z)$ غير موجودة إذن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية

طريقة ثانية

3 $f(z) = \frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots\right]$ $0 < |z|$

2 $= \frac{1}{z} + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n+1}} + \cdots$ $0 < |z|$

3 ونلاحظ بأن القسم الرئيسي يتكون من عدد غير منته من الحدود إذن $z=0$ نقطة شاذة أساسية

جواب السؤال الثاني: 25 [illegible]

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-4)^3} = \frac{1}{(z-4)^3}\left(\frac{z+1}{z}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{(z-4)^3}\left[1 + \frac{1}{4+z-4}\right] = \frac{1}{(z-4)^3}\left[1+\frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{z-4}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{(z-4)^3}\left[1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{z-4}{4}+\frac{(z-4)^2}{4^2}-\frac{(z-4)^3}{4^3}+\frac{(z-4)^4}{4^4}+\cdots\right)\right]$$

$0<|z-4|<4$

$$= \frac{1}{(z-4)^3}\left[1+\frac{1}{4}-\frac{z-4}{4^2}+\frac{(z-4)^2}{4^3}-\frac{(z-4)^3}{4^4}+\frac{(z-4)^4}{4^5}-\cdots\right]$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{(z-4)^3}-\frac{1}{4^2}\,\frac{1}{(z-4)^2}+\frac{1}{4^3}\,\frac{1}{(z-4)}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}(z-4)-\frac{1}{4^6}(z-4)^2+\cdots$$

$0<|z-4|<4$

من هذا النشر نستنتج أن [illegible] للدالة $f(z)$ عند $z=4$ [illegible]

$$\operatorname*{Res}_{z=4} f(z) = b_1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=4} f(z) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

لتصنيف نقطة اللانهاية: نرى أن نقطة اللانهاية [illegible]
[illegible]
[illegible] نقطة اللانهاية نقطة [illegible]
[illegible] للدالة المعطاة وذلك بوضع

$$f(\infty) = 0$$

[illegible]

02

جواب السؤال الثاني: (الإجابة نائية) 25

بالإجابة نائية: نفرض c_1 دائرة محيطة بالنقطة $z=4$ ونصف قطرها $r_1 < 4$
ونفرض c_2 دائرة محيطة بالنقطة $z=4$ ونصف قطرها r_2 صغير بحيث
بحيث يكون $0 < r_2 < r_1 < 4$ نستنتج حسب مبرهنة لوران يكون

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-4)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-4)^n} \qquad 0<r_2<|z-4|<r_1<4$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(z)}{(z-4)^{n+1}}\,dz \qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(z)}{(z-4)^{-n+1}}\,dz \qquad n=1,2,3\ldots$$

2 $$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^{-1+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-4)^3}\,dz$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{z+1}{z}\right]''_{z=4} = \frac{1}{2!}\left[\frac{+2}{z^3}\right]_{z=4} = \frac{1}{(4)^3}$$

2 $$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^{-1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-4)^2}\,dz = \frac{1}{1!}\left[\frac{z+1}{z}\right]'_{z=4}$$

$$= 1\left[\frac{-1}{z^2}\right]_{z=4} = -\frac{1}{4^2}$$

2 $$b_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^{-2}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-4)}\,dz = \left.\frac{z+1}{z}\right|_{z=4} = \frac{5}{4}$$

2 $$b_4 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^{-3}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{z+1}{z}\,dz = 0$$

نفس الأسلوب سيكون

$$b_5, b_6, \ldots, b_n = 0$$

ع/ 0

لحساب a_0

2 { $a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^1}}{(z-4)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{(z-4)^4}}{z}\,dz =$

$= \frac{z+1}{(z-4)^4}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4^4}$

2 { $a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{(z-4)^5}}{z}\,dz = \frac{1}{(-4)^5} = -\frac{1}{(4)^5}$

2 { $a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{z(z-4)^3}}{(z-4)^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{z+1}{(z-4)^6}}{z}\,dz = \frac{z+1}{(z-4)^6}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4^6}$

أي أن

$f(z) = \frac{\frac{5}{4}}{(z-4)^3} - \frac{1}{4^2}\frac{1}{(z-4)^2} + \frac{1}{(4)^3}\frac{1}{(z-4)^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5}(z-4) - \frac{1}{4^6}(z-4)^2 - \dots$

$0 < |z-4| < 4$

ومنه هذا التفرد قطبي

4 { $\operatorname{Res}_{z=4} f(z) = b_1 = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

نقطة اللانهاية

لو عوضنا صفر المرتبة الأولى للبسط

ولو تقابلت رتبة الرابعة للمقام

5 { أوجد لو عندنا الرتبة الثالثة عند $f(z)$

أي أن نقطة اللانهاية هي نقطة شاذة قابلة للإزالة

إذا وجدنا

$f(\infty) = 0$

تعتبر صفر من الرتبة الثالثة

00

حل التمرين الثاني : [illegible]

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+4x+20}\,dx$ لحساب قيمة التكامل I نحسب قيمة التكامل (12)

الدالة المستقلة المرافقة $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}$ نضع $z = x$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة $z^2+4z+20 = 0$

1 $\Delta = 16 - 80 = -64 = 64i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i8$

$z_1 = \dfrac{-4+i8}{2} = -2+4i$ $\qquad z_2 = \dfrac{-4-8i}{2} = -2-4i$

1 لتكن Γ كفاف مغلق بسيط موجب الاتجاه يتكون من C_R النصف العلوي من الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R > \sqrt{20}$ أي $R > 2\sqrt{5}$ بالإضافة إلى القطعة المستقيمة $-R \le x \le R$ ، [illegible]

1 $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}\,dz = 2\pi i\, b_1$

$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=-2+4i} \dfrac{z e^{iz}}{z^2+4z+20} = \dfrac{z e^{iz}}{2z+4}\Big|_{z=-2+4i}$

2 $b_1 = \dfrac{(-2+4i)\,e^{-4-2i}}{-4+8i+4} = \dfrac{(-2+4i)\,e^{-4-2i}}{8i}$

$b_1 = \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}i\right)e^{-4-2i} = e^{-4}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}i\right)(\cos 2 - i\sin 2)$

$= e^{-4}\left(\tfrac{1}{2}\cos 2+\tfrac{1}{4}\sin 2\right) + e^{-4} i\left(\tfrac{1}{4}\cos 2-\tfrac{1}{2}\sin 2\right)$

1 $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}\,dz = 2\pi i\left\{e^{-4}\left[\left(\tfrac{1}{2}\cos 2+\tfrac{1}{4}\sin 2\right)+i\left(\tfrac{1}{4}\cos 2-\tfrac{1}{2}\sin 2\right)\right]\right\}$ [illegible]

$= 2\pi e^{-4}\left[\left(\tfrac{1}{2}\sin 2-\tfrac{1}{4}\cos 2\right)+i\left(\tfrac{1}{2}\cos 2+\tfrac{1}{4}\sin 2\right)\right]$

05

ولدينا

1 $$\int_{\Gamma} \frac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+4x+20}\,dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}\,dz$$

ولدينا استنادا إلى توطئة جوردان يأتي

1 $$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+4z+20}\,dz = 0$$

فقط نقطة الانعزالية في الجزء العلوي من المستوي للدالة $\dfrac{z}{z^2+4z+20}$

ومنه يأتي

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+4x+20}\,dx = 2\pi e^{-4}\left[\left(\tfrac{1}{2}\sin 2 - \tfrac{1}{4}\cos 2\right) + i\left(\tfrac{1}{2}\cos 2 + \tfrac{1}{4}\sin 2\right)\right]$$

ولدينا

1 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+4x+20}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+4x+20}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20}\,dx$$

وبمقارنة الطرفين ... يأتي

1 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20}\,dx = \frac{\pi}{e^4}\left(\cos 2 + \tfrac{1}{2}\sin 2\right)$$

وهو المطلوب

لحساب التكامل I_2 نفرض أن

3 $$z = e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

حيث (12) $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ ، $\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(z + \tfrac{1}{z}\right)$ ، $\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}\left(z^2 + \tfrac{1}{z^2}\right)$

ومنه يأخذ التكامل I_2 الشكل

1 $$I_2 = \int_{|z|=1} \frac{\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right)\dfrac{dz}{iz}}{13 - 6\left(z^2 + \tfrac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{6z^4 - 13z^2 + 6}\,dz$$

النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة

1 $$\Delta = (13)^2 - 4(36) = 169 - 144 = 25$$

ومنه يأتي

1 $\left\{ z_1^2 = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow z_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \right.$

وهذان الجذران يقعان خارج دائرة الوحدة

1 $\left\{ z_2^2 = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right.$

وهذان الجذران يقعان داخل دائرة الوحدة [illegible]

[illegible]

1 $I = -\frac{1}{2i}(2\pi i)(b_1 + b_2)$

1 $b_1 = \underset{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}{\text{Res}} \frac{z^2+1}{6z^4-13z^2+6} = \left.\frac{z^2+1}{24z^3-26z}\right|_{z=\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{\frac{2}{3}+1}{24\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-26\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{16\sqrt{\frac{2}{3}}-26\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\,(-10)}$

$= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-10)} = \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}(-10)} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$

1 $b_2 = \underset{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}}{\text{Res}} \frac{z^2+1}{6z^4-13z^2+6} = \left.\frac{z^2+1}{24z^3-26z}\right|_{z=-\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}+1}{-24\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+26\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{\frac{5}{3}}{-16\sqrt{\frac{2}{3}}+26\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\;10} = +\frac{1}{2\sqrt{6}}$

[illegible]

2 $I = -\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right) = 0$

حساب قيمة التكامل I_3 ⑫

حساب قيمة التكامل أو قيمة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

إيجاد التكامل التالي

2 { $z = x$ نضع $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$

النقاط الشاذة لهذه الدالة هي $z = \pm 2i$ و $z = \pm i$

ليكن Γ كفاف مغلق بسيط يتكون من C_R النصف العلوي من دائرة الصفر ومركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $R > 2$ بالإضافة إلى القطعة المستقيمة $-R \le x \le R \wedge y = 0$ وتقع داخله أي النقاط الشاذة

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\,(b_1 + b_2)$$

حيث

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \left.\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i} = \frac{-1}{2i(-1+4)} = \frac{-1}{6i}$$

$$b_2 = \operatorname{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \left.\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{z=2i} = \frac{-4}{(-4+1)(4i)} = \frac{-4}{-12i}$$

إذن

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6i} + \frac{2}{6i}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

لكن

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz$$

وبما أن درجة البسط أقل من درجة المقام بدرجتين فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = 0$$

إذن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

أي أن

2 $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{6}$$

جواب السؤال الرابع [15] درجة

الاشارة بالملاحظة

4 $\frac{1}{2\pi i}\int_C z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_j - \sum_{k=1}^{m}\beta_k b_k$

حيث a_j اصفار الدالة f ضمن C و α_j رتبة الاصفار

و b_k اقطاب الدالة $f(z)$ ضمن C و β_k رتبة الاقطاب

بالترتيب

5 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2(i)+2(-i)-2(1+i)-2(1-i)$

$= -2-2=-4$

حيث أن أصفار الدالة f في $f(z)=\frac{(z^2+1)^2}{(z^2-2z+2)^2}$ هي جذور المعادلة

3 $z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_1=i \quad z_2=-i$

وكل منها عبارة عن صفر من الرتبة الثانية

أما أقطاب الدالة $f(z)$ فهي الجذور المعادلة $(z^2-2z+2)=0$

أي

3 $z_1=1+i \quad z_2=1-i$

وكل منها عبارة عن قطب من الرتبة الثانية

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. نزار الشوشو

بتوفيق للطلبة ...

السؤال الثاني تتم الإجابة على الطريقة المثلى

جـــامعة البعث

كلية العـــــلوم ـــ قسم الرياضيات

تحليل عقدي/2/

الفصل الثاني للعام الدراسي

اسم الطالب :

2012-2011

السؤال الأول : (26درجة)

1"- احسب قيمة التكامل $\oint_c (3z^2 - 5z + i)dz$

علماً" أن c هي القطعة المستقيمة الواصلة من $z = i$ إلى $z = 1$.

2"- احسب قيمة التكامل $\int_c (y - x - 3x^2 i)dz$

علماً" أن c هي القطعة المستقيمة الواصلة من $z = 0$ إلى $z = 1 + 2i$.

السؤال الثاني : (24درجة)

أوجد منشور لورانت للدالة $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$ في النطاق $1 < |z - 1|$.

ثمّ عين نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة ثمّ أوجد $\operatorname{Res} f(z)$ عند $z = \infty$

السؤال الثالث : (30درجة)

1"- أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f_1(z) = \frac{\sin 3z}{z^2} - \frac{3}{z} \quad \& \quad f_2(z) = \frac{1}{e^z - 1} \quad \& \quad f_3(z) = z^3 e^{\frac{1}{z - 2i}}$$

2"- صنف نوع نقطة اللانهاية للدوال الآتية

$$g_1(z) = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \& \quad g_2(z) = \frac{z^3 + i}{z} \quad \& \quad g_3(z) = \frac{z}{z^3 + i}$$

السؤال الرابع : (20درجة)

اعتماداً" على مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكاملين الآتيين

$$\int_{|z|=2} \tan z \, dz \quad \& \quad \int_{|z|=2} \frac{1 - 2z}{z(z - 1)(z - 3)} dz$$

مدرس المقرر د. رامز الشيخ فتوح

ω^2 /

[illegible] | $13+13=26$ |

جواب السؤال الأول:

أ- المعادلة الوسيطية للقطعة المستقيمة هي

2 $z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \le t \le 1$

$z(t) = i + t(1-i) = t + i(1-t) \quad 0 \le t \le 1$ (13)

1 $z'(t) = 1 - i$

ومنه بات

2 $f(z) = 3x^2 - 3y^2 - 5x + i(6xy - 5y + 1)$

$f(z(t)) = t - 3 + i(-6t^2 + 11t - 4)$

1 $\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ ومنه باعتبار العلاقة يأتي

1 $\int_c (3z^2 - 5z + i)\,dz = \int_0^1 [(t-3) + i(-6t^2 + 11t - 4)](1-i)\,dt$

1 $= (1-i)\left[\int_0^1 t - 3\,dt + i\int_0^1 (-6t^2 + 11t - 4)\,dt\right]$

2+2 $= (1-i)\left[\frac{t^2}{2} - 3t\Big|_0^1 + i\left(-2t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 4t\right)\Big|_0^1\right] = (1-i)\left[-\frac{5}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

3 $= \left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = -3 + 2i$

طريقة ثانية: الدالة السابقة تحليلية فنستنتج [illegible] من حدود التكامل الى [illegible] 4

4+2 $\int_c (3z^2 - 5z + i)\,dz = z^3 - \frac{5}{2}z^2 + iz\Big|_i^1 = \left(1 - \frac{5}{2} + i\right) - \left(-i + \frac{5}{2} - 1\right)$

3 $= 1 - \frac{5}{2} + i + i - \frac{5}{2} + 1 = -3 + 2i$

ج- المعادلة الوسيطية للقطعة المستقيمة هي

2 $z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \le t \le 1$ (13)

$z = 0 + t(1 + 2i) = t + 2it \quad 0 \le t \le 1$

+2 $z'(t) = 1 + 2i$, $f(z(t)) = 2t - t - 3t^2 i = t - 3t^2 i$

1 $\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$ باعتبار العلاقة يأتي

+2 $\int_c (y - x - 3x^2 i)\,dz = \int_0^1 (t - 3t^2 i)(1 + 2i)\,dt = (1 + 2i)\left[\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - i\,t^3\Big|_0^1\right]$

3 $= (1 + 2i)\left(\frac{1}{2} - i\right) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) + i(-1 + 1) = \frac{5}{2}$

جواب السؤال السابع (24) أربع وعشرون درجة

طريقة أولى:

$$f(z)=\frac{z^2-2z+3}{(z-1)-1}=\frac{z^2-2z+3}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\left[(z-1)+\frac{2}{(z-1)}\right]\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\dots+\frac{1}{(z-1)^n}+\dots\right]$$

1 1 2 4 $1<|z-1|$

$$=(z-1)+1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\dots+\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\dots$$ 4

$$+\frac{2}{(z-1)}+\frac{2}{(z-1)^2}+\dots+\frac{2}{(z-1)^{n-1}}+\frac{2}{(z-1)^n}+\dots$$

$$=1+(z-1)+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$ 4 $1<|z-1|<\infty$

ومن هذا النشر نستنتج أن النقطة اللانهائية هي قطب بسيط (4) لأن الحدود ذات القوى الموجبة محدود وأكبر أس يساوي 1 إذن

$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)=-3$ (4)

طريقة ثانية: نحيط النقطة $z_0=1$ بدائرة c_2 نصف قطرها r_2

كما نحيط النقطة $z_0=1$ بدائرة c_1 نصف قطرها r_1 بحيث أن $1<r_2<r_1<\infty$

عندئذ تكون الدالة المعطاة تحليلية على c_1 و c_2 وفي النقاط الواقعة بين الدائرتين المتحدتي المركز c_1 و c_2

عندئذ اعتماداً على مبرهنة لورانت يمكننا من أجل كل نقطة z واقعة بين c_1 و c_2 للدالة $f(z)$ التمثيل الآتي

1 $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-1)^n}\qquad 1<r_2<|z-1|<r_1<\infty$$

حيث

1 $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}}dz\qquad n=0,1,2\dots$$

1 $$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z)}{(z-1)^{-n+1}}dz\qquad n=1,2\dots$$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

من أجل $n=0$ يكون

1 $$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z)}{z-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{z^2-2z+3}{(z-1)(z-2)}dz$$

الدالة المستكاملة غير تحليلية عند النقطتين $z=1$ و $z=2$ ضمن c_1 لذلك نحيط $z=1$ بدائرة c_3 ونحيط $z=2$ بدائرة c_4 بحيث أن $c_3\cap c_4=\emptyset$ عندئذ

1 $$a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_3}\frac{\frac{z^2-2z+3}{z-2}}{z-1}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_4}\frac{\frac{z^2-2z+3}{z-1}}{z-2}dz$$

ع٥/

$a_0 = \left[\frac{z^2-2z+3}{z-2}\right]_{z=1} + \left[\frac{z^2-2z+3}{z-1}\right]_{z=2} = \frac{2}{-1} + \frac{3}{1} = 1$ وباستخدام الصيغة التكاملية لكوشي يكون

$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{z^2-2z+3}{(z-1)^2(z-2)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{\frac{z^2-2z+3}{z-2}}{(z-1)^2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_4} \frac{\frac{z^2-2z+3}{(z-1)^2}}{z-2}\,dz$

$= \frac{1}{1!}\left[\frac{z^2-2z+3}{z-2}\right]'_{z=1} + \left[\frac{z^2-2z+3}{(z-1)^2}\right]_{z=2} = \left.\frac{z^2-4z+1}{(z-2)^2}\right|_{z=1} + \left[\frac{z^2-2z+3}{(z-1)^2}\right]_{z=2}$

بتعويض

$a_1 = -2 + 3 = 1$

بوضع $n = 2$

$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{z^2-2z+3}{(z-1)^3(z-2)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{\frac{z^2-2z+3}{z-2}}{(z-1)^3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_4} \frac{\frac{z^2-2z+3}{(z-1)^3}}{z-2}\,dz$

$= \frac{1}{2!}\left[\frac{z^2-2z+3}{z-2}\right]''_{z=1} + \left[\frac{z^2-2z+3}{(z-1)^3}\right]_{z=2} = \frac{1}{2}\left[\frac{z^2-4z+1}{(z-2)^2}\right]'_{z=1} + 3$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2z-4)(z-2)^2 - 2(z-2)(z^2-4z+1)}{(z-2)^4}\right]_{z=1} + 3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2-4}{1} + 3 = -3+3 = 0$

وبالمثل نجد أن

1 $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$

$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-z_0}$

بوضع $n = 1$ نجد

$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{z^2-2z+3}{z-2}\,dz = \left[z^2-2z+3\right]_{z=2} = 3$

2/1

$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{(z-1)(z^2-2z+3)}{z-2}\,dz = (z-1)(z^2-2z+3)\Big]_{z=2} = 3$

1 $b_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{(z-1)^2(z^2-2z+3)}{(z-2)}\,dz = (z-1)^2(z^2-2z+3)\Big]_{z=2} = 3$

بالاستمرار نجد أن

1 أي أن $b_4 = b_5 = \dots = b_n = 3$

$f(z) = 1 + (z-1) + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$ $\quad 1 < |z-1| < \infty$

وعليه نقطة الشذوذ قطب بسيط

4

$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -3$

4

(6) النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)=z^3 e^{\frac{1}{z-2i}}$ في النقطة $z=2i$ 2

نلاحظ ان

1 $\lim_{z\to 2i} f_3(z) = \lim_{z\to 2i} z^3 e^{\frac{1}{z-2i}} = -8i \lim_{z\to 2i} e^{\frac{1}{z-2i}}$

وبما ان هذه النهاية غير موجودة لأنه عند $z=yi$ ونترك z تسعى نحو $2i$ على المحور التخيلي نجد ان

1 $\lim_{z\to 2i} e^{\frac{1}{z-2i}} = \lim_{y\to 2} e^{\frac{1}{yi-2i}} \Rightarrow \lim_{y \overset{>}{\to} 2} e^{\frac{1}{yi-2i}} = \infty$

1 $\lim_{y \overset{<}{\to} 2} e^{\frac{1}{yi-2i}} = 0$

وبما ان $\lim_{z\to 2i} f_3(z)$ غير موجوده فالنقطة $z=2i$ هي نقطة شاذة اساسية

طريقة ثانية

1 $z^3 = -8i - 12(z-2i) + 6i(z-2i)^2 + (z-2i)^3$

1 $e^{\frac{1}{z-2i}} = 1 + \frac{1}{z-2i} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-2i)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-2i)^3} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-2i)^n} + \dots \quad 0<|z-2i|$

$z^3 e^{\frac{1}{z-2i}} = -8i - \frac{4i}{(z-2i)^2} - \frac{8i}{6}\frac{1}{(z-2i)^3} + \dots - \frac{8i}{n!}\frac{1}{(z-2i)^n}$

$-12(z-2i) - 12 - \frac{6}{(z-2i)} - \frac{1}{(z-2i)^3} \quad - \frac{12}{n!}\frac{1}{(z-2i)^n} - \dots$

$+6i(z-2i)^2 + 6i(z-2i) + 3i + \frac{i}{(z-2i)} + \dots + \frac{6i}{n!}\frac{1}{(z-2i)^n} - \dots$

$+(z-2i)^3 + (z-2i)^2 + \frac{1}{2!}(z-2i) + \frac{1}{6} + \frac{1}{4!}\frac{1}{(z-2i)} + \dots + \frac{1}{n!(z-2i)^{n-3}} \dots$

وبما ان الجزء الرئيسي من مفكوك لورنت يحتوي على عدد غير محدود من الحدود فالنقطة $z=2i$ هي نقطة شاذة اساسية
2

جواب السؤال الثالث: [30 = 12 + 18] تدرك درجة

$f_1(z) = \frac{\sin 3z - 3z}{z^2}$

أ- الدالة $f_1(z) = \frac{\sin 3z}{z^2} - \frac{3}{z}$ تكتب بالشكل (6)

النقاط الشاذة للدالة هي $z=0$ وبما أن

$\lim_{z \to 0} f_1(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2} = \frac{0}{0}$

1 $= \lim_{z \to 0} \frac{3\cos 3z - 3}{2z} = \frac{0}{0}$

1 $= \lim_{z \to 0} \frac{-9\sin 3z}{2} = \frac{0}{2} = 0$

2 فنستنتج النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة

طريقة ثانية

1 $\sin 3z = 3z - \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} - \dots$

1 $\sin 3z - 3z = -\frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} - \frac{(3z)^7}{7!} + \dots$

2 $\frac{\sin 3z - 3z}{z^2} = -\frac{27z}{3!} + \frac{(3z)^3}{5!} - \frac{(3z)^7}{7!}$

وبما أن الجزء الرئيسي معدوم من هذا المنشور فإن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة وذلك استنادا لأول المبرهنة التالية: (الشرط اللازم والكافي
2 لكي تكون النقطة الشاذة المعزولة z_0 للدالة $f(z)$ نقطة شاذة قابلة للإزالة هو أن يكون لهذه الدالة في جوار $0 < |z - z_0| < S$ المنشور الآتي

$0 < |z - z_0| < S$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

• النقاط الشاذة للدالة $f_2(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ هي جذور المعادلة (6)

$e^z - 1 = 0$

2 $e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

وبما أن

2 $\lim_{z \to 2n\pi i} f_2(z) = \lim_{z \to 2n\pi i} \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{0} = \infty$

نأخذ هذه النقاط أقطاب ومنها

$\lim (z - 2n\pi i) \frac{1}{\quad} = \frac{0}{0} = \lim \frac{1}{\quad} = 1$

$g_1(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{1-t}{1+t}$

وبما أن النقطة t=0 نقطة عادية للدالة $g_1(\frac{1}{t})$ أي بها

4 $\lim_{t\to 0} g_1(\frac{1}{t}) = 1$

فهذا يعني z=∞ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة وبوضع g(∞)=1 تصبح نقطة عادية للدالة $g_1(z)$

$g_2(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t^3}+i}{\frac{1}{t}} = \frac{1+it^3}{t^2}$

وبما أن

4 $\lim_{t\to 0} g_2(\frac{1}{t}) = \lim_{t\to 0} \frac{1+it^3}{t^2} = \infty$

$\lim_{t\to 0} t^2 g_2(\frac{1}{t}) = \lim_{t\to 0} (1+it^3) = 1$

إذن z=∞ قطب من الرتبة الثانية

$g_3(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^3}+i} = \frac{t^2}{1+it^3} \Rightarrow \lim_{t\to 0} g_3(\frac{1}{t}) = 0$

إذن النقطة z=∞ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة وبوضع

4 g(∞)=0 تصبح نقطة عادية وهي صفر من الرتبة الثانية

جواب السؤال الرابع (5+5+5=15) فقط درجة

(15) الحل: بالاعتماد على مبرهنة الرواسب يكون

1 $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1} \text{Res}_{z=z_j} f(z)$

النقاط الشاذة للدالة $\tan z$ هي أصفار المقام

1 $\cos z = 0$

1 $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $n = 0, \pm 1, \ldots$ من أجل n=0 نجد

1 $z_1 = \frac{\pi}{2}$ والتي تقع داخل الدائرة |z|=2

1 والتي تقع $z_2 = \frac{3\pi}{2}$ من أجل n=1   خارج الدائرة

1 والتي تقع $z_3 = -\frac{\pi}{2}$ من أجل n=-1   داخل الدائرة

وبما أن بقية النقاط الشاذة تقع خارج الدائرة إذن

1 $\int_{|z|=2} \tan z\,dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \tan z + \text{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \tan z\right)$

خ ب

1 $\lim_{z \to \pm\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{\cos z} = \infty$

وبالتالي

نقطتين شاذتين [illegible]

1 $\underset{z=\frac{\pi}{2}}{\operatorname{Res}} \tan z = \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1$

1 $\underset{z=-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{Res}} \tan z = \frac{-1}{+1} = -1$

درجة ثابتة

1 $\oint_{|z|=2} \tan z \, dz = 2\pi i\,[-1-1] = -4\pi i$

النقاط الشاذة [illegible] $\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}$ [illegible]

(١٥)

3 $z(z-1)(z-3) = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \quad z_2 = 1 \quad z_3 = 3$

1 النقطتان $z_1 = 0$ و $z_2 = 1$ تقعان داخل الدائرة بينما $z_3 = 3$ تقع خارجها [illegible] 1

$$\oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}\,dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z)\right) \quad 1$$

1 $\underset{z=0}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to 0} z\,\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{3}$

1 $\underset{z=1}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)\,\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 1} \frac{1-2z}{z(z-3)} = \frac{1-2}{1(1-3)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

درجة ثابتة

1+1 $\oint_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{3}\pi i$

انتهت الاجابات

مدرس المادة

د. [illegible]

هذا السلم [illegible]

جامعة البعث

تحليل عقدي /2/ اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الدورة الصيفية للعام الدراسي 2011-2012

السؤال الأول : (10+10+6=26درجة)

1"- أوجد قيمة التكاملين الآتيين $I_1 = \int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-1)^2} dz$ و $= \int \bar{z} \, dz =$

2"- عين النقاط من القرص الدائري $|z| \le 1$ التي تبلغ عندها الدالة $= iz^3 + 2z$) قيمها العظمى.

السؤال الثاني :(24 درجة)

أوجد نشر لورانت للدالة $f(z) = \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z}$ في النطاق $1 < |z| < 2$

أوجد قيمة الراسب لهذه الدالة عند النقطة $z = 0$ وما هو نوع نقطة اللانهاية ا

الدالة وما هي قيمة الراسب عند اللانهاية .

السؤال الثالث : (24درجة)

أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$f_1(z) = \frac{1}{\cos z - \sin z}$ & $f_2(z) = z^{-2} \cos^2(z + \frac{\pi}{2})$

$\frac{1}{(z)}$

$f_3(z) = \frac{3z^2 - 1}{(z^2 - 2iz + 3)^2}$ & $f_4(z) = z^3 e^{\frac{1}{2z-2}}$

السؤال الرابع : (26درجة)

اعتمادا" على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية

$I_3 = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4} dz$ & $I_2 = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos \pi z} dz$ & $_1 = \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z(z^2 + 6iz - 1)} dz$

انتهت الأسئلة أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

22/

جواب السؤال الأول ١٠

1 أ) إن للدالة المستكاملة في التكامل أ نقاط شاذة هي جذور المعادلة $z(z-1)^2 = 0$

(١٥) وهي إما $z=0$ أو $(z-1)^2=0 \Rightarrow z=1$ وكلتا هاتين النقطتين

تقعان في داخلية الدائرة $(|z|=2)$ لذلك نحيط النقطة $z_1 = 0$ بدائرة

1 { C_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف وكذلك نحيط النقطة $z_2 = 1$ بدائرة

C_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف لأن يكون $C_1 \cap C_2 = \phi$ وبالتالي

حسب مبرهنة كوشي غورسا للمناطق المتعددة الترابط يكون

2 $I_1 = \int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-1)^2}dz = \int_{C_1} \frac{\frac{2z+1}{(z-1)^2}}{z}dz + \int_{C_2}\frac{\frac{2z+1}{z}}{(z-1)^2}dz$

وبالتالي

2+2 $I_1 = 2\pi i\left[\frac{2z+1}{(z-1)^2}\right]_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{2z+1}{z}\right]'_{z=1}$

1+1 $I_1 = 2\pi i + 2\pi i\left[\frac{2z-2z-1}{z^2}\right]_{z=1} = 2\pi i - 2\pi i = 0$

ب) إن الدالة المستكاملة هي دالة شاملة أي دالة تحليلية على أي منطقة بسيطة

(١٥) تحوي $z=\pi i$ و $z=1$ وبالتالي قيمة التكامل لا تتغير بالاتجاه المسلوك وكيفية

3 { السلوك نستخدم التابع الأصلي للدالة المستكاملة بين حدي التكامل

1+3+3 $I_2 = \int_{\pi i}^{1} e^z dz = e^z \Big|_{\pi i}^{1} = e - e^{\pi i} = e - (-1) = e + 1$

طريقة ثانية

(١٥)

1 { $z = z_1 + t(z_2 - z_1) = \pi i + t(1-\pi i) = t + \pi i(1-t)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$z' = 1 - \pi i$ $\quad 0\le t\le 1$ وبالتالي

$f(z(t)) = e^t[\cos\pi(1-t) + i\sin\pi(1-t)]$

وبالتالي

1 { $I_2 = \int_{\pi i}^{1} e^z dz = \int_0^1 e^t[\cos\pi(1-t)+i\sin\pi(1-t)](1-\pi i)dt$

$= (1-\pi i)\left[\int_0^1 e^t\cos\pi(1-t)dt + i\int_0^1 e^t \sin\pi(1-t)dt\right]$

أيضاً $= (1-\pi i)(I_3 + i I_4)$ (*)

$I_3 = \int_0^1 e^t \cos\pi(1-t)\,dt$

نفرض $\cos\pi(1-t) = u \Leftarrow \pi\sin\pi(1-t)\,dt = du$

و $e^t\,dt = dv \Leftarrow e^t = v$ ينتج أن

$= e^t\cos\pi(1-t)\Big|_0^1 - \pi\int_0^1 e^t\sin\pi(1-t)\,dt =$

$e^t\cos\pi(1-t)\Big|_0^1 - \pi\left[e^t\sin\pi(1-t)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 e^t\cos\pi(1-t)\,dt\right]$

ومنها

$I_3 + \pi^2 I_3 = \left[e^t\cos\pi(1-t) - \pi e^t\sin\pi(1-t)\right]\Big|_0^1 \Rightarrow$

أيضاً

$I_3 = \frac{1}{1+\pi^2}\left[e^t\cos\pi(1-t) - \pi e^t\sin\pi(1-t)\right]_0^1$

$= \frac{1}{1+\pi^2}\left[e-(-1)\right] = \frac{1}{1+\pi^2}(e+1)$ (**)

$I_4 = \int_0^1 e^t\sin\pi(1-t)\,dt$

نفرض أن $\sin\pi(1-t) = u \Leftarrow -\pi\cos\pi(1-t)\,dt = du$

$e^t\,dt = dv \Leftarrow e^t = v$ ينتج أن

$= e^t\sin\pi(1-t)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 e^t\cos\pi(1-t)\,dt$

أيضاً

$= e^t\sin\pi(1-t)\Big|_0^1 + \pi\left[e^t\cos\pi(1-t)\Big|_0^1 - \pi\int_0^1 e^t\sin\pi(1-t)\,dt\right]$

ومنها

$I_4 + \pi^2 I_4 = (1+\pi^2) I_4 = e^t\sin\pi(1-t)\Big|_0^1 + \pi e^t\cos\pi(1-t)\Big|_0^1$

$I_4 = \frac{1}{1+\pi^2}\left[+\pi e + \pi\right] = \frac{(e+1)\pi}{1+\pi^2}$ (***)

نعوض (**) و (***) في (*) فنجد

$I_2 = (1-\pi i)\left(\frac{1}{1+\pi^2}(e+1) + i\,\frac{(e+1)\pi}{1+\pi^2}\right) = \frac{e+1}{1+\pi^2}(1-\pi i)(1+i\pi)$

$= \frac{e+1}{1+\pi^2}(1+\pi^2) = e+1$

(6) 1) بما أن الدالة دالة كثيرة حدود f فإنها متصلة في كل نقطة من نقاط المستوي المركب ومن باب أولى على الدائرة $|z|=1$ وكذلك f دالة تحليلية في [illegible] فإن الدالة [illegible] برهنة القيمة العظمى فإن هذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط الدائرة $|z|=1$ وليس في أي نقطة من داخلها [illegible]

27

الطريقة الثانية:

لتأخذ c_2 دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r_2 ولتأخذ c_1 دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r_1 وبحيث أن $1 < r_2 < r_1 < 2$

عندئذ تكون الدالة المعطاة تحليلية على c_1 و c_2 وفي الحلقة المحصورة بينهما لذلك العبارة على سلسلة لورانت يكون لها الشكل التالي

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad 1 < |z| < 2$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz \qquad n = 1, 2 \dots$$

سنبدأ بحساب المعاملات

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z + 2}}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 2z}}{z - 1} dz$$

حيث c_3 دائرة محيطة بالنقطة 0 و c_4 دائرة محيطة بالنقطة $z = 1$ وباستخدام صيغة كوشي للتكامل وبفرض $c_3 \cap c_4 = \phi$ نجد أن

$$b_1 = \left[\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z + 2}\right]_{z=0} + \left[\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 2z}\right]_{z=1} = 1 + \frac{-1}{-1} = 1 + 1 = 2$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z + 2} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{(3z^2 - 6z + 2)/(z-2)}{z - 1} dz$$

$$= 0 + \left[\frac{3z^2 - 6z + 2}{z - 2}\right]_{z=1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{z(3z^2 - 6z + 2)}{z^2 - 3z + 2} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{z(3z^2 - 6z + 2)/(z-2)}{(z - 1)} dz = 0 + \frac{-1}{-1} = 1$$

وهكذا نجد أن

$$b_4 = b_5 = \dots = b_n = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z}}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z + 2}}{z^2} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_4} \frac{\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 2z^2}}{z - 1} dz$$

$$= \frac{1}{1!}\left[\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z + 2}\right]' + \left[\frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 2z^2}\right] \dots (6z-6)(z^2 - 3z + 2) - (2z-3)(3z^2 - 6z \dots$$

$\frac{2}{}$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{z^3-3z^2+2z}{z^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{z^2-3z+2}{z^3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_4} \frac{\frac{3z^2-6z+2}{z^4-2z^3}}{(z-1)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{3z^2-6z+2}{z^2-3z+2}\right]''_{z=0} + \left[\frac{3z^2-6z+2}{z^4-2z^3}\right]_{z=1}$$

2

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{-3z^2+8z-6}{(z^2-3z+2)^2}\right]'_{z=0} + 1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(-6z+8)(z^2-3z+2)^2-2(z^2-3z+2)(2z-3)(-3z^2+8z-6)}{(z^2-3z+2)^4}\right]$$

$$+1 = \frac{32-72}{2^5}+1 = -\frac{40}{2^5}+1 = -\frac{5}{4}+1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2^2}$$

وبالاستقراء نجد أن

1 $a_2 = -\frac{1}{2^3}$ $\quad a_3 = -\frac{1}{2^4}$ $\quad \ldots \quad a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$

أي أن

1 $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ $\quad 1<|z|<2$

2 $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{3z^2-6z+2}{3z^2-6z+2}\right|_{z=0} = \frac{2}{2} = 1$

نقطة اللانهاية نقطة شاذة قابلة للإصلاح لأن

3 $\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{3t-6t^2+2t^2}{1-3t+2t^2} = 0$ لذا فإن

$f(\infty) := 0$ نصبح $z=\infty$ نقطة عادية

باعتبارها

وكذلك

1 $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} f(z) - \operatorname{Res}_{z=1} f(z) - \operatorname{Res}_{z=2} f(z)$

2 $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \left.\frac{3z^2-6z+2}{3z^2-6z+2}\right|_{z=1} = \frac{-1}{-1} = 1$

2 $\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \left.\frac{3z^2-6z+2}{3z^2-6z+2}\right|_{z=2} = \frac{12-12+2}{12-12+2} = \frac{2}{2} = 1$

ومنه

1 $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -1-1-1 = -3$

27

جواب السؤال الثالث: (24 درجة)

• النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلة $\cos z - \sin z = 0$

أي جذور المعادلة:

2 $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin z\right) = 0$

أي جذور المعادلة: $\sqrt{2}\cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

أو $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = 0$

أي أن $z + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftarrow \cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

أي أن النقاط هي $z = -\frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

أو

2 $\Leftarrow \frac{\pi}{4} - z = n\pi \Leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right) = 0$

$z = \frac{\pi}{4} - n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

وبما أنها أصفار بسيطة للمقام فهي أقطاب بسيطة للدالة $f_1(z)$

2 أو بما أن

1 $\lim_{z \to \frac{\pi}{4} - n\pi} f_1(z) = \lim_{z \to \frac{\pi}{4} - n\pi} \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - n\pi - z\right)} = \frac{1}{0} = \infty$

1 و

$\lim_{z \to \frac{\pi}{4} - n\pi} \left(z - \frac{\pi}{4} + n\pi\right) f_1(z) = \lim_{z \to \frac{\pi}{4} - n\pi} \frac{z - \frac{\pi}{4} + n\pi}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

1 نستنتج أن النقاط $z = \frac{\pi}{4} - n\pi$ أو $z = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ هي أقطاب بسيطة.

• النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي جذور المعادلة $z^2 = 0$ أي $z = 0$

1 وبما أن

1 + 1 $\lim_{z \to 0} \frac{\cos^2\left(z + \frac{\pi}{2}\right)}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1 + \cos(2z + \pi)}{2}}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{1 + \cos(2z + \pi)}{2z^2}$

1 + 1 $= \frac{0}{0} = \lim_{z \to 0} \frac{-2\sin(2z + \pi)}{4z} = \frac{0}{0} = \lim_{z \to 0} \frac{-4\cos(2z + \pi)}{4}$

$= 1$ إذن $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للحذف

1

25/

• النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي جذور المعادلة $(z^2-2iz+3)^2=0$

ⓑ أي جذور المعادلة $z^2-2iz+3=0$

4 $\Delta=(-2i)^2-4\times1\times3=-4-12=-16$

$z_1=\frac{2i+4i}{2}=\frac{6i}{2}=3i \qquad z_2=\frac{2i-4i}{2}=-i$

2 وبما أن هذه النقاط لا تعدم البسط وأصفار المقام من الدرجة الثانية إذاً أقطاب من الرتبة الثانية

أو بما أن

1 $\lim_{z\to -i} f_3(z)=\lim_{z\to -i}\frac{3z^2-1}{(z^2-2iz+3)^2}=\frac{3(-i)^2-1}{(-i)^2-2i(-i)+3}$

$=\frac{-4}{-1-2+3}=\frac{-4}{0}=\infty$ و

$\lim_{z\to -i}(z+i)^2 f_3(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)^2\frac{3z^2-1}{(z+i)^2(z-3i)^2}$

$=\lim_{z\to -i}\frac{3z^2-1}{(z-3i)^2}=\frac{-4}{(-4i)^2}=\frac{-4}{-16}=\frac{1}{4}\neq0\neq\infty$

إذن $z=-i$ قطب من الرتبة الثانية

كذلك بما أن

1 $\lim_{z\to 3i} f_3(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{3z^2-1}{(z^2-2iz+3)^2}=\frac{3(3i)^2-1}{-9+6+3}=\frac{-10}{0}=\infty$ و

$\lim_{z\to 3i}(z-3i)^2 f_3(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{3z^2-1}{(z+i)^2}=\frac{-10}{(4i)^2}=\frac{-10}{-16}$

إذن $z=3i$ قطب من الرتبة الثانية

• النقاط الشاذة للدالة $f_4(z)$ هي جذور المعادلة ⓒ

1 $z=1 \Leftarrow 2z-2=0$ وبما أن صفر المقام $2z-2=0$ نقطة تجعل مقام $\frac{1}{2z-2}$ وبالتالي نقطة شاذة

2 أساسية للدالة $e^{\frac{1}{2z-2}}$ أي لا نهائية نقطة شاذة أساسية للدالة

أو

$f_4(z)=z^3 e^{\frac{1}{2z-2}}$

$\lim f_4(z)=\lim z^3 e^{\frac{1}{2z-2}}$ ...

ثانياً

أولاً: $z_j \in (|z|<1)$ (9)

1 $I_1 = 2\pi i \sum_{z=z_j} \text{Res} \frac{z^2-1}{z(z^2+6iz-1)}$

النقاط الشاذة للدالة

1 $\frac{z^2-1}{z(z^2+6iz-1)}$ في جذور المعادلة $z(z^2+6iz-1)=0$

$z_1 = 0$ رتبة

وهي تقع داخل الدائرة $|z|=1$ وجذور المعادلة

1 $\begin{cases} z^2+6iz-1=0 \Rightarrow \Delta=(6i)^2-4(1)(-1)=-32 \\ \sqrt{\Delta}=\pm 4\sqrt{2}\, i \end{cases}$

1 $z_2 = \frac{-6i+4\sqrt{2}i}{2} = (-3+2\sqrt{2})i \in (|z|<1)$

1 $z_3 = \frac{-6i-4\sqrt{2}i}{2} = (-3-2\sqrt{2})i \notin (|z|<1)$

رتبة أولى

1 $I_1 = 2\pi i\,(b_1+b_2)$

1 $b_1 = \text{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{z^2-1}{z^2+6iz-1}\right|_{z=0} = \frac{-1}{-1} = 1$

1 $b_2 = \text{Res}_{z=(-3+2\sqrt{2})i} f(z) = \left.\frac{z^2-1}{3z^2+12iz-1}\right|_{z=(-3+2\sqrt{2})i} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$ 1

نجد

1 $I_1 = 2\pi i\left(1-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{(-3+2\sqrt{2})\pi i}{\sqrt{2}}$

ثانياً: (9)

1 $I_2 = 2\pi i \sum_{z=z_j} \text{Res} \frac{e^2}{\cos \pi z}$ $(z_j \in |z|<1)$

النقاط الشاذة للدالة في جذور المعادلة

1 $\cos \pi z = 0$

1 $\pi z = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow z = \frac{1}{2}+n$ حيث $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

نأخذ $n=0$ نجد $z_1 = \frac{1}{2}$ وتقبل

1+1 $z_2 = -\frac{1}{2}$ عند $n=-1$ وباقي النقاط الشاذة تقع خارج الدائرة لذلك

1 $I_2 = 2\pi i\,(b_1+b_2)$

1 $b_1 = \text{Res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{e^2}{\cos \pi z} = \left.\frac{e^2}{-\pi \sin \pi z}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{e^2}{-\pi}$ [illegible]

س٧/

1 $I_2 = 2\pi i \left(\frac{e^{i}}{-\pi} + \frac{e^{i}}{\pi} \right) = -2i\left(e^{i} - e^{-i}\right) = -4i\,\frac{e - e}{2} = -4i\sinh\frac{1}{2}$

1 $I_3 = 2\pi i \sum \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{\sin z}{z^4}$ $\{z_j \in |z| < \}$

ملاحظة

8

1 × [illegible] z=0 داخل [illegible]

1 $I_3 = 2\pi i\, b_1$

$b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}$

حيث

1 $\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots$

1 $\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \cdots$

2 اي ان $b_1 = -\frac{1}{3!}$

1 $I_3 = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{\pi i}{3}$ ومنه فإن

انتهت الإجابات

مدرس المادة

د. [illegible]

1

جامعة البعث   تحليل عقدي /2/   اسم الطالب

كلية العلوم – قسم الرياضيات   الفصل الأول [redacted] للعام الدراسي 2012 -2013

السؤال الأول : (10+10+6=26درجة)

1"- أوجد قيمة التكاملين الآتيين

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{z}}{(z+2)(z^2+2z)}dz \quad \& \quad \int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{z}}{2z+i}dz$$

2"- عين النقاط من القرص الدائري $|z| \le 1$ والتي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^3+4z^2-z$ قيمها العظمى .

السؤال الثاني :(24 درجة)

أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{z+1}{z(z-4)^3}$ في النطاق $0<|z-4|<4$ ثم

أوجد قيمة الراسب لهذه الدالة عند النقطة $z=0$ وما هو نوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة وما هي قيمة الراسب عند اللانهاية .

السؤال الثالث : (24 درجة)

أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f_1(z)=\frac{z^2-\frac{\pi^2}{16}}{(2\sin^2 z)-1} \quad \& \quad f_2(z)=\frac{\sin z}{z^2+z}$$

$$f_3(z)=\frac{e^z}{e^{2z}-1} \quad \& \quad f_4(z)=ze^{\frac{1}{z^2-i}}$$

السؤال الرابع : (26درجة)

اعتمادا" على نظرية الرواسب احسب قيمة التكاملات الآتية

$$I_1=\int_{|z|=1} ze^{\frac{2}{z^2}}dz \quad \& \quad I_2=\int_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2-2z}dz$$

انتهت الأسئلة

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول: (١٠ + ١٠ + ٦ = ٢٦)

أولاً:

$$I_1 = \int_{|z|=1} \frac{z^2 e^z}{2z+i}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{z^2 e^z}{z+\frac{i}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\,2\pi i\,[z^2 e^z]_{z=-\frac{i}{2}}$$ (2) (4) 10+10

$$= \pi i\left[\left(-\frac{i}{2}\right)^2 e^{-\frac{i}{2}}\right] = -\frac{\pi i}{4} e^{-\frac{i}{2}}$$ (2) (2)

ثانياً:

$$I_2 = \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)(z^2+2z)}\,dz = \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z+2)^2}\,dz$$ 1

نلاحظ بأن النقاط الشاذة للدالة المستكاملة هي $z=0$ و $z=-2$ وكلا النقطتين تقعان داخل المنحني 1

لذلك نحيط $z=0$ بدائرة c_1 صغيرة بما فيه الكفاية

وكذلك نحيط $z=-2$ بدائرة c_2 صغيرة بما فيه الكفاية

وبالتالي فإن $c_1 \cap c_2 = \phi$ وبالاعتماد على مبرهنة كوشي للمناطق المتعددة الترابط يكون 1

$$I_2 = \int_{c_1} \frac{\frac{e^z}{(z+2)^2}}{z}\,dz + \int_{c_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z+2)^2}\,dz$$ 1

1 + 1 $$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+2)^2}\right]_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{e^z}{z}\right]'_{z=-2}$$

1 + 1 $$= 2\pi i\,\frac{1}{4} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{ze^z - e^z}{z^2}\right]_{z=-2}$$

1 $$= \frac{\pi i}{2} + 2\pi i\left[\frac{-2e^{-2} - e^{-2}}{4}\right] = \frac{\pi i}{2} + 2\pi i\,\frac{-3e^{-2}}{4}$$

1 $$= \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2}(-3e^{-2}) = \frac{\pi i}{2}(1 - 3e^{-2})$$

ثالثاً: الدالة المعطاة تحليلية وبالتالي تبلغ قيمتها العظمى على محيط الدائرة $|z|=1$

وكذلك نرى أنها لا تساوي صفراً في كل نقطة من داخل الدائرة $|z|=1$ وبالتالي استناداً إلى

مبرهنة المقياس الأصغر فإن الدالة تبلغ قيمتها الصغرى على محيط الدائرة $|z|=1$ 1

نفرض أن $z = e^{i\theta}$ لذلك

1 $$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \left(e^{3i\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta}\right)\left(e^{-3i\theta} + 4e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

$$= 1 + 4e^{i\theta} - e^{2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 16 - 4e^{i\theta} - e^{-2i\theta} - 4e^{-i\theta} + 1$$

تابع

$|f(z)|^2 = 18 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} = 18 - 2\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right)$

$= 18 - 2\cos 2\theta$ — ثم بما

$-1 \le \cos 2\theta \le 1 \Leftarrow$ — وبما أن

$-2 \le -2\cos 2\theta \le 2$

$16 \le 18 - 2\cos 2\theta \le 20$ — وبالتالي

$18 - 2\cos 2\theta = 20 \Rightarrow$

$-2\cos 2\theta = 2 \Rightarrow \cos 2\theta = -1$ — إذا أن

$2\theta = \pi + 2n\pi \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ — إذا أن

$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

من أجل $n = 0$ بأن $\theta = \frac{\pi}{2}$ (نقطة نهاية)

$z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

ومن أجل $n = 1$ بأن $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (نهاية)

$z = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

وهي النقاط التي تبلغ عندها الدالة قيمها الكبرى

جواب السؤال الثاني: (24)

$f(z) = \frac{z+1}{z(z-4)^3} = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(z-4)^3}\left(1 + \frac{1}{4 + z - 4}\right)$

$= \frac{1}{(z-4)^3}\left[1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 + \frac{z-4}{4}}\right]$

من أجل $\left|\frac{z-4}{4}\right| < 1 \Leftarrow$ يكون $0 < |z-4| < 4$

$f(z) = \frac{1}{(z-4)^3}\left[1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z-4}{4} + \frac{(z-4)^2}{4^2} - \frac{(z-4)^3}{4^3} + \frac{(z-4)^4}{4^4} + \cdots\right)\right]$

$f(z) = \frac{1}{(z-4)^3}\left[\frac{5}{4} - \frac{z-4}{4^2} + \frac{(z-4)^2}{4^3} - \frac{(z-4)^3}{4^4} + \frac{(z-4)^4}{4^5} + \cdots\right]$

$f(z) = \frac{\frac{5}{4}}{(z-4)^3} - \frac{1}{4^2}\,\frac{1}{(z-4)^2} + \frac{1}{4^3}\,\frac{1}{(z-4)} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5}(z-4) + \cdots$

النقطة $z = 4$ قطب بسيط لأن الدالة لانهاية

$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$

$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{(z-4)^3} = \frac{1}{-64} = \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$

$f(\frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}(\frac{1}{t}-1)^3} = \frac{\frac{1+t}{t}}{\frac{(1-t)^3}{t^4}} = \frac{t^3(1+t)}{(1-t)^3}$

3 $\lim_{t\to 0} f(\frac{1}{t}) = 0$

وبما أن النقطة $z=\infty$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح ونعرف $f(\infty)=0$

تصبح نقطة الانعدام من رتبة ... بالرتبة الثالثة

3 $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$

السؤال الثالث: $24 = 6+6+6+6$ درجة

(6) • النقاط الشاذة للدالة

$f_1(z) = \frac{z^2 - \frac{\pi^2}{16}}{(2\sin^2 z)-1}$

هي جذور المعادلة

1 $(2\sin^2 z)-1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 z - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 z = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1 $\sin z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4}+2n\pi$

أو

1 $\sin z = \pi - \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{3\pi}{4}+2n\pi$

من أجل $n=0$ يكون

1 $z = \frac{\pi}{4}$

ونلاحظ أن البسط ينعدم عند النقطة ذاتها $z=\frac{\pi}{4}$

1 هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح في الدالة

وباقي النقاط الشاذة هي أقطاب بسيطة لأنها أصفار

1 من الرتبة الأولى للمقام ولا ينعدم البسط عندها

(6) • النقاط الشاذة للدالة

$f_2(z) = \frac{\sin z}{z^2+z}$

هي جذور المعادلة

1 $z(z+1)=0 \Leftarrow z^2+z=0$

1 إما $z=0$ أو $z=-1$

2 وبما أن $z=0$ ينعدم عندها البسط لذلك النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح

2 أما النقطة $z=-1$ فهي قطب بسيط لأنها تعدم المقام أي صفر من الرتبة الأولى للمقام ولا تعدم البسط

2/

$f(z) = \frac{e^z}{e^{z^2}-1}$

⑥ النقاط الشاذة للدالة

حل: أصفار المقام

$e^{z^2}-1=0 \Rightarrow e^{z^2}=1$

3 { $z^2 = 2n\pi i \Rightarrow z = n\pi i$, $n = 0, \pm1, \pm2$

وهذه النقاط أصفار من الرتبة الأولى للمقام ولا تعدم البسط

3 { وهي أصفار من الرتبة الأولى للمقام اذن $z = n\pi i$ هي أقطاب بسيطة

⑥ النقاط الشاذة للدالة

$f(z) = z e^{\frac{1}{z^2 - i}}$

حل: أصفار المقام

1 $z = (i)^{\frac{1}{2}} \Leftarrow z^2 = i \Leftarrow z^2 - i = 0$

1+1 $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow (i)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, $k=0$ من أجل $k=0$ نجد

1 { $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

وبما أن هاتان النقطتان هي أصفار للدالة $z^2 - i$ فهي أقطاب بسيطة للدالة $\frac{1}{z^2-i}$ وبالتالي فهي نقطة شاذة أساسية للدالة

2 { $e^{\frac{1}{z^2-i}}$ وإذا أعطانا تمارين - القاعدة $z = z_0$ صفر للدالة $f(z)$ هي قطب للدالة $\frac{1}{f(z)}$ والتالي تكون قطب للدالة $\frac{1}{f(z)}$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{f(z)}}$

السؤال الرابع: [26 = 13 + 13] ... درجة

2 $I_1 = \int_{|z|=1} z e^{\frac{2}{z^2}} dz = 2\pi i \left(\sum_{z=z_j} \text{Res} f(z)\right)$

النقاط الشاذة للدالة الشاذة هي نقطة $z = 0$ وهي نقطة شاذة أساسية

1 $\text{Res}_{z=0} f(z) = b_1$

5 { $z e^{\frac{2}{z^2}} = z\left(1 + \frac{2}{1!z^2} + \frac{4}{2!z^4} + \frac{1}{3!}\frac{8}{z^6} + \frac{1}{4!}\frac{16}{z^8} + \cdots\right)$

$= z + \frac{2}{z} + \frac{2}{z^3} + \cdots$

ومنه نلاحظ أن $b_1 = 2$

2/3 $I_1 = 2\pi i(2) = 4\pi i$

$$I_2 = \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) \right) \quad (2)$$

2)

النقاط الشاذة للدالة المكاملة في داخل المسار

$z^2 - 2z = 0 \Rightarrow z(z-2) = 0 \Rightarrow z = 0$ (1)

إذن $z = 2$ وكذلك $z = 0$ [illegible] (1)

$z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة وعليه فإن (3)

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} = 0$$

أما $z = 2$ فهي قطب بسيط وعليه فإن

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{\sin z}{z^2 - 2z} = \lim_{z \to 2} (z-2) \frac{\sin z}{z(z-2)} = \frac{\sin 2}{2} \quad (3)$$

إذن (3)

$$I_2 = 2\pi i \left(0 + \frac{\sin 2}{2} \right) = \pi i \sin 2$$

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. [illegible]

ملاحظة السؤال الثاني

يمكن حله بطريقة ثانية

دون استخدام مبرهنة لورانت

Scanned by CamScanner